

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT

DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA - PPGF

SAMUEL ISIDORO DOS SANTOS JÚNIOR

**FORMULAÇÃO EM TERMOS DE ESPINORES DE DUAS
COMPONENTES DA TEORIA DE CAMPOS CLÁSSICOS DE
PROCA EM ESPAÇOS-TEMPO CURVOS SEM TORÇÃO**

JOINVILLE, SC

2015

SAMUEL ISIDORO DOS SANTOS JÚNIOR

**FORMULAÇÃO EM TERMOS DE ESPINORES DE DUAS
COMPONENTES DA TEORIA DE CAMPOS CLÁSSICOS DE
PROCA EM ESPAÇOS-TEMPO CURVOS SEM TORÇÃO**

Dissertação apresentada para obtenção do título
de mestre em Física da Universidade do Estado de
Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas -
CCT.

Orientador: Jorge Gonçalves Cardoso

JOINVILLE / SC

2015

FICHA CATALOGRÁFICA

S237f Santos Júnior, Samuel Isidoro dos

Formulação em Termos de Espinores de Duas
Componentes da Teoria de Campos Clássicos de
Proca em Espaços-Tempo Curvos sem Torção
/ Samuel Isidoro dos Santos Júnior - 2014.

33 p. ; 21 cm

Orientador: Jorge Gonçalves Cardoso

Bibliografia: 31-33p

Dissertação (mestrado) - Universidade do Estado
de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Programa de Pós-Graduação em Física, III. Título

CDD 530 - 23. ed.

SAMUEL ISIDORO DOS SANTOS JÚNIOR

**FORMULAÇÃO EM TERMOS DE ESPINORES DE DUAS
COMPONENTES DA TEORIA DE CAMPOS CLÁSSICOS DE PROCA EM
ESPAÇOS-TEMPO CURVOS SEM TORÇÃO**

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade do Estado de Santa Catarina, aprovada em 23 de fevereiro de 2015.

ORIENTAÇÃO

Jorge Gonçalves Cardoso

CCT/UDESC

BANCA EXAMINADORA

Jorge Gonçalves Cardoso

CCT/UDESC

Daniel Vieira

CCT/UDESC

Waldir Alves Rodrigues Junior

UNICAMP

Joinville, SC - 23 de fevereiro de 2015

Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao meu orientador Jorge Gonçalves Cardoso pelos conhecimentos compartilhados que por vezes superou o âmbito acadêmico. A agência de fomentos CAPES pela bolsa oferecida. A todos os professores do PPGF-UDESC, em especial aqueles com quem tive disciplinas: Daniel Vieira, Edgard Amorim e Ricardo Zanon. Agradeço o esforço e a partilha de conhecimento de todos os alunos da PPGF-UDESC, em especial ao Rodrigo Antonio da Silva e Graziéle Bortolini. Agradeço aos demais familiares e colegas pelo companheirismo, em especial a atual doutoranda Karla Weber e ao futuro teórico Rodrigo Ribamar Nascimento pela ajuda imprescindível para a conclusão deste.

RESUMO

SANTOS, Samuel I. **Formulação em Termos de Espinores de Duas Componentes da Teoria de Campos Clássicos de Proca em Espaços-Tempo Curvos sem Torção**. 2015. 33f. Dissertação (Mestrado em Física - Área: Relatividade e Cosmologia) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2015.

A teoria de campos clássicos de Proca em espaços-tempo curvos sem torção é apresentada. Em particular, deduzir-se-á a equação de onda covariante mundo para um potencial de Proca. Uma versão da teoria em termos de espinores de duas componentes é subsequentemente exibida levando-se a cabo uma transcrição direta para o contexto de um dos formalismos espinoriais de Infeld e van der Waerden. Algumas técnicas calculacionais bem conhecidas serão subsequentemente utilizadas para derivar as equações de onda que controlam a propagação dos campos. Estes procedimentos sugerem que nas equações de onda resultantes não ocorre interação entre os campos externos e curvaturas eletromagnéticas. O que resulta é, com efeito, que a única interação que ocorre nesse contexto teórico envolve estritamente os campos de Proca e funções de onda para grávitons.

PALAVRAS-CHAVE: Formalismos de Infeld e van der Waerden; Fótons; Grávitons; Campos de Proca; Equações de onda.

ABSTRACT

SANTOS, Samuel I. **Formulation in Terms of Two Component Spinors of the Theory of Classical Proca Fields in Curved Space-Times Without Torsion** . 2015. 33f. Dissertation (Master Course in Physics - Area: Relativity and Cosmology) - Santa Catarina State University, Post Graduation Program in Physics, Joinville, 2015.

The world formulation of the full theory of classical Proca fields in generally relativistic spacetimes is reviewed. Subsequently the entire set of field equations is transcribed in a straightforward way into the framework of one of the Infeld-van der Waerden formalisms. Some well-known calculational techniques are then utilized for deriving the wave equations that control the propagation of the fields allowed for. It appears that no interaction couplings between such fields and electromagnetic curvatures are ultimately carried by the wave equations at issue. What results is, in effect, that the only interactions which occur in the theoretical context under consideration involve strictly Proca fields and wave functions for grávitons.

KEY WORDS: Spinors. Wave Equations. Photons.

Sumário

1	Introdução	8
2	Teoria Mundo	11
3	Curvatura Espinorial	14
3.1	Objetos de Curvatura Mistos	14
3.2	Curvaturas Eletromagnéticas Espinoriais	16
3.3	Curvaturas Gravitacionais Espinoriais	18
4	Teoria Espinorial	20
4.1	Versão Espinorial das Equações de Campo de Proca	20
4.2	Técnicas Computacionais	22
4.3	Equações de Onda	24
5	Conclusões	27

Capítulo 1

Introdução

No ano de 1933, Infeld e van der Waerden [1] introduziram os chamados formalismos espinoriais $\gamma\epsilon$, os quais são utilizados para descrever de modo formalmente mais simples e elegante uma parte considerável da estrutura geométrica da Relatividade Geral. Uma das motivações para construir-se estes formalismos está relacionada com uma descrição em termos de espinores de duas componentes da teoria de Dirac para o elétron em espaços-tempo curvos sem torção. Em adição, tais formalismos constituem extensões de trabalhos anteriores dos mesmos autores [2], [3].

Nos formalismos $\gamma\epsilon$, pares de fibras que definem algebricamente espinores de duas componentes são assentados em cada ponto não-singular de um espaço-tempo curvo equipado com um operador derivada covariante sem torção. A viabilidade formal de tais assentamentos repousa na existência local de estruturas espinoriais sobre variedades que possuem certos atributos topológicos [20]. A estrutura geométrica dos espaços de spin absorve a ação do grupo de calibre generalizado de Weyl [4], que aparece como um conjunto de matrizes complexas (2×2) não-singulares cujas entradas dependem essencialmente de um parâmetro real definido sobre o espaço-tempo sob consideração. Witten [5] obteve a decomposição espinorial de duas componentes do tensor de Riemann, além de estabelecer a contagem pertinente de componentes numéricas mundo-espin e de obter invariantes típicos da Relatividade Geral. Penrose [7] obteve um conjunto de expansões algébricas formais e de regras espinoriais de redução de valências, além de ter obtido a decomposição espinorial irreduzível do tensor de Weyl. Um aspecto importante destes formalismos, o qual não pega lugar na descrição puramente mundo das estruturas espaço-temporais, é que quando espinores de duas componentes são inseridos no contexto geométrico da Relatividade Geral, tensores de Maxwell surgem naturalmente dentro das configurações de curvaturas, fornecendo assim equações de campo e de onda para fótons que portam um caráter intrinsecamente geométrico. A descrição espinorial completa da geometria mundo

tal como posta pelos formalismos $\gamma\epsilon$, foi realizada em 2004 [10] quando foi sugerido pela primeira vez que fótons de Infeld e van der Waerden poderiam descrever o fundo cósmico de micro-ondas em conjugação com o modelo cosmológico padrão.

Neste trabalho, inicialmente formular-se-á a partir de um princípio variacional a versão mundo da teoria de campos clássicos de Proca [6] em espaços-tempo curvos sem torção. Em particular, a equação de onda covariante mundo para um potencial de Proca será deduzida. A versão da teoria em termos de espinores de duas componentes é subsequentemente apresentada com base no uso das técnicas calculacionais disponíveis nas Refs. [10], [18], [16]. O principal resultado oriundo da formulação espinorial a ser apresentada é que não ocorrem acoplamentos entre campos de Proca e fótons oriundos de curvaturas nas equações de onda resultantes dos procedimentos pertinentes. Uma das motivações relacionadas ao trabalho, está associada com a ausência na literatura da teoria a ser descrita aqui. Será necessário desenvolver-se uma breve revisão das estruturas de curvaturas espinoriais de Infeld e van der Waerden, as quais devem ser apresentadas como uma base para os desenvolvimentos a serem levados a cabo aqui. Ver-se-á, então, que curvaturas espinoriais emergem a partir da decomposição espinorial de certos objetos mistos mundo-espin que carregam informação sobre contribuições gravitacionais e eletromagnéticas.

As seguintes convenções serão utilizadas: componentes de quantidades mundo num espaço-tempo $\mathcal{M}$ serão rotuladas por índices gregos minúsculos, os quais assumirão os valores 0, 1, 2, 3. A assinatura métrica adotada para um tensor métrico $g_{\mu\nu}$ em $\mathcal{M}$ é $(+ - - -)$. O determinante de $g_{\mu\nu}$ será denotado por $\mathbf{g}$. O operador derivada parcial para coordenadas espaço-temporais x^μ sobre $\mathcal{M}$, e o operador derivada covariante de $\mathcal{M}$, serão denotados por ∂_μ e ∇_μ , respectivamente. Ao longo de todo o trabalho, assumir-se-á que $\mathcal{M}$ admite uma estrutura espinorial. Adotar-se-á a convenção de Bach [8] de acordo com a qual parênteses e colchetes envolvendo blocos de índices denotam as operações de simetrização e antissimetrização, respectivamente. Para o tensor de Ricci, será adotada a convenção de sinal usual

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda$$

com $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ sendo concordantemente o tensor de Riemann de ∇_μ . Componentes espinoriais conjugadas complexas serão denotadas por letras latinas maiúsculas linhadas e não-linhadas, de acordo com a notação adotada em [9]. Uma barra horizontal sobre uma letra núcleo denotará a operação de conjugação complexa. Esta convenção será usada somente algumas vezes. Algumas convenções adicionais serão explicadas no devido tempo.

O trabalho tem sido organizado como segue. No Capítulo 2, será apresentada a

teoria mundo dos campos de interesse. No Capítulo 3, a revisão mencionada acima sobre as estruturas de curvaturas espinoriais é exibida. No entanto, a teoria de densidades de espin [15], a qual está intimamente envolvida no contexto do formalismo ε , não será utilizada aqui. Portanto, as matrizes que formam o grupo de Weyl não serão utilizadas explicitamente. Consequentemente, os procedimentos espinoriais a serem levados a cabo aqui serão restritos ao formalismo γ . No Capítulo 4, as equações espinoriais de campo e de onda de nosso interesse são obtidas com base nas técnicas calculacionais referidas anteriormente. Algumas conclusões relacionadas com o trabalho são feitas no Capítulo 5. Deve ser enfatizado que os campos a serem considerados aqui supostamente portam um caráter clássico, tal que não haverão no que segue quaisquer considerações sobre campos quantizados.

Capítulo 2

Teoria Mundo

Neste Capítulo, a teoria mundo de campos de Proca é apresentada, isto é, aqui obteremos as equações de campo e de onda dentro do contexto do formalismo tensorial tradicional. As técnicas pertinentes são descritas em detalhe nas Ref.s [14], [12], [13].

Para obter as equações de campo mundo em $\mathcal{M}$, pode-se inicialmente usar um princípio variacional que envolve a ação

$$S = \int_{\tau} \mathcal{L} d^4x \sqrt{-g}, \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade Lagrangiana de Proca e a diferencial d^4x define um elemento de quadrivolume em $\mathcal{M}$ dado por

$$d^4x = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad (2.2)$$

ou, alternativamente, em termos da densidade tensorial de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$, por

$$d^4x = \frac{1}{4!} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\sigma. \quad (2.3)$$

A densidade Lagrangiana de Proca é formalmente similar à do campo eletromagnético, mas com a adição de um termo de massa significando fisicamente que campos de Proca possuem massa m , isto é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\nu A^\nu. \quad (2.4)$$

Em (2.4), a quantidade A_ν é um potencial de Proca e $f_{\mu\nu}$ é o correspondente bivector de Proca o qual é expresso por

$$f_{\mu\nu} = 2\nabla_{[\mu} A_{\nu]} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}. \quad (2.5)$$

De acordo com a prescrição variacional usual [11], [13], a variação δA_ν é identicamente nula sobre a fronteira $\partial\tau$ do volume τ e assume valores arbitrários em τ , de modo que

$$\delta S = \delta \int_\tau \mathcal{L} d^4x \sqrt{-\mathfrak{g}} = 0. \quad (2.6)$$

Por definição, a variação δ é linear, satisfaz a regra de Leibniz e comuta com derivadas parciais bem como com integrações. Em adição, $\delta\sqrt{-\mathfrak{g}} \equiv 0$ na união de τ com $\partial\tau$ de modo que, substituindo (2.4) em (2.6), vem

$$\delta S = \int_\tau [\delta(-\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\nu A^\nu)] \sqrt{-\mathfrak{g}} d^4x = 0. \quad (2.7)$$

Da álgebra tensorial em $\mathcal{M}$, têm-se as relações

$$f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}f_{\mu\nu}f_{\alpha\beta} \quad (2.8)$$

e

$$\nabla_\mu f^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\mathfrak{g}} f^{\mu\nu}), \quad (2.9)$$

tal que utilizando (2.5) e as propriedades da variação δ , obtêm-se para a integral (2.7) a seguinte expressão:

$$\delta S = \int_\tau [-f^{\mu\nu} \partial_\mu (\delta A_\nu) + m^2 A^\nu \delta A_\nu] \sqrt{-\mathfrak{g}} d^4x = 0. \quad (2.10)$$

Agora, integrando por partes (2.10), vem

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_\tau [\frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\mathfrak{g}} f^{\mu\nu}) + m^2 A^\nu] \sqrt{-\mathfrak{g}} \delta A_\nu d^4x \\ &\quad - \int_{\partial\tau} f^{\mu\nu} \sqrt{-\mathfrak{g}} \delta A_\nu d^3x_\mu = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

com

$$d^3x_\mu = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\sigma. \quad (2.12)$$

Como mencionado acima, a variação δA_ν é identicamente nula sobre a fronteira $\partial\tau$. Portanto, o segundo termo do lado direito da equação (2.11) é nulo, de tal modo que

$$\int_\tau [\frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\mathfrak{g}} f^{\mu\nu}) + m^2 A^\nu] \sqrt{-\mathfrak{g}} \delta A_\nu d^4x = 0. \quad (2.13)$$

Desde que δA_ν é arbitrário em τ , obtêm-se as equações de campo

$$\frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\mathfrak{g}} f^{\mu\nu}) + m^2 A^\nu = 0. \quad (2.14)$$

As equações (2.14) constituem a primeira metade da teoria mundo, as quais podem obviamente ser reexpressas como

$$\nabla_\mu f^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (2.15)$$

A segunda metade aparece com as identidades de Bianchi para $f_{\mu\nu}$, as quais são expressas por [13], [14]

$$\nabla_{[\gamma} f_{\mu\nu]} = 0 \Leftrightarrow \nabla_\gamma f_{\mu\nu} + \nabla_\mu f_{\nu\gamma} + \nabla_\nu f_{\gamma\mu} = 0. \quad (2.16)$$

Usando alguns dos esquemas de dualização fornecidos na Ref. [9], pode-se reexpressar a identidade (2.16) como

$$\nabla_\mu {}^* f^{\mu\nu} = 0, \quad (2.17)$$

na qual, por definição,

$${}^* f_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} f^{\alpha\beta}, \quad (2.18)$$

é o bivetor de Proca dual de $f_{\mu\nu}$. Então, combinando as equações (2.5) e (2.15) com a relação

$$(\nabla_\lambda \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\lambda) A_\mu = -R_{\lambda\nu\mu}{}^\sigma A_\sigma, \quad (2.19)$$

juntamente com as relações

$$\begin{aligned} \nabla^\nu f_{\nu\mu} &= \nabla^\nu (\nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu) = \square A_\mu - g^{\nu\lambda} ([\nabla_\lambda, \nabla_\mu] + \nabla_\mu \nabla_\lambda) A_\nu \\ &= \square A_\mu - [\nabla_\nu, \nabla_\mu] A^\nu - \nabla_\mu (\nabla^\lambda A_\lambda) \end{aligned} \quad (2.20)$$

logo, somando o termo de massa, obtêm-se a equação de onda¹

$$(\square + m^2) A_\mu + R_\mu{}^\lambda A_\lambda - \nabla_\mu (\nabla^\lambda A_\lambda) = 0. \quad (2.21)$$

¹Dentro do contexto teórico sob consideração, a divergência covariante de A^μ é igual a zero. Isto será reconsiderado no Capítulo 5.

Capítulo 3

Curvatura Espinorial

Neste Capítulo, apresentaremos uma revisão sucinta de alguns aspectos das curvaturas espinoriais de Infeld e van de Waerden. Uma descrição completa de tais estruturas pode ser encontrada na Ref. [10]. Os objetos de curvatura mistos de Infeld e van der Waerden para o formalismo γ são apresentados na Seção 3.1. As contribuições espinoriais explícitas de curvaturas eletromagnéticas são descritas na Seção 3.2, enquanto que as contribuições gravitacionais são descritas subsequentemente na Seção 3.3. A correspondência posta no contexto dos formalismos via objetos conectores Hermitianos entre tensores mundo e tensores de espin, será assumida desde o início.

3.1 Objetos de Curvatura Mistos

A informação sobre a curvatura de espin de $\mathcal{M}$ é obtida no formalismo γ a partir do comutador covariante [16]

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \sigma^{\rho AA'} \equiv 2\nabla_{[\mu} (\nabla_{\nu]} \sigma^{\rho AA'}) = 0, \quad (3.1)$$

com $\sigma^{\rho AA'}$ sendo um dos objetos conectores Hermitianos pertinentes. Expandindo a configuração (3.1) como feito em [21], obtêm-se

$$(\sigma^{\rho BA'} W_{\mu\nu B}{}^A + c.c.) + \sigma^{\lambda AA'} R_{\mu\nu\lambda}{}^\rho = 0, \quad (3.2)$$

onde

$$W_{\mu\nu A}{}^B = 2\partial_{[\mu} \gamma_{\nu]A}{}^B - (\gamma_{\mu A}{}^C \gamma_{\nu C}{}^B - \gamma_{\nu A}{}^C \gamma_{\mu C}{}^B), \quad (3.3)$$

define um objeto de curvatura misto de Infeld-van der Waerden para uma conexão afim $\gamma_{\mu A}{}^B$, e o símbolo “*c.c.*” denota aqui e no que segue um termo conjugado complexo. Uma descrição detalhada da estrutura afim dos formalismos está disponível em [15].

O objeto $W_{\mu\nu CD}$ também pode ser obtido a partir de [18]

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \alpha^A = W_{\mu\nu B}^A \alpha^B, \quad (3.4)$$

onde α^A é um vetor de espin. Contraindo os índices A e B da Eq. (3.3), vem

$$W_{\mu\nu A}^A = 2\partial_{[\mu} \gamma_{\nu] A}^A, \quad (3.5)$$

posto que a versão contraída do termo quadrático de (3.3) é identicamente igual a zero. Ainda mais, usando a relação espinorial afim contraída

$$\partial_{[\mu} \gamma_{\nu] D}^D = -2i\partial_{[\mu} \Phi_{\nu]}, \quad (3.6)$$

com Φ_μ sendo um potencial afim [1], deduz-se que

$$W_{\mu\nu A}^A = -W_{\mu\nu A'}^{A'}, \quad (3.7)$$

ou seja

$$\text{Re } W_{\mu\nu A}^A = 0. \quad (3.8)$$

O potencial Φ_μ satisfaz o princípio generalizado de calibre de Weyl, aparecendo assim como um potencial eletromagnético puramente geométrico. É conveniente introduzir o bivector associado com Φ_μ , a saber

$$F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} \Phi_{\nu]}, \quad (3.9)$$

tal que Eqs. (3.5) e (3.6) tornam-se

$$W_{\mu\nu A}^A = -2iF_{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Um desdobramento de curvatura emerge a partir da definição do W -objeto. Para ver-se isto, é conveniente considerar a relação

$$W_{\mu\nu AB} = W_{\mu\nu(AB)} + W_{\mu\nu[AB]}, \quad (3.11)$$

onde a parte antissimétrica é expressa, utilizando 3.10, por

$$W_{\mu\nu[AB]} = \frac{1}{2}W_{\mu\nu C}^C \gamma_{AB} = -iF_{\mu\nu} \gamma_{AB}, \quad (3.12)$$

com γ_{AB} sendo um dos espinores métricos do formalismo γ . Portanto, têm-se

$$W_{\mu\nu AB} = W_{\mu\nu(AB)} - iF_{\mu\nu} \gamma_{AB}. \quad (3.13)$$

Pode ser mostrado [10] que a parte simétrica $W_{\mu\nu(AB)}$ está associada com $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ de acordo com a relação

$$W_{\mu\nu(AB)} = \frac{1}{2}\sigma_{AB'}^\rho\sigma_B^{\lambda B'}R_{\mu\nu\rho\lambda}, \quad (3.14)$$

a qual é garantida por algumas propriedades de simetria peculiares dos objetos conectores. Assim, chega-se ao desdobramento

$$W_{\mu\nu AB} = \frac{1}{2}\sigma_{AA'}^\rho\sigma_B^{\lambda A'}R_{\mu\nu\rho\lambda} - iF_{\mu\nu}\gamma_{AB}. \quad (3.15)$$

Os espinores de curvatura associados com a afinidade $\gamma_{\mu AB}$ entram na decomposição espinorial de $W_{\mu\nu AB}$, a saber

$$W_{AA'BB'CD} = \sigma_{AA'}^\mu\sigma_{BB'}^\nu W_{\mu\nu CD} = \gamma_{AB}w_{A'B'CD} + \gamma_{A'B'}w_{ABCD}, \quad (3.16)$$

com

$$w_{ABCD} = w_{(AB)CD} = \frac{1}{2}\sigma_{AA'}^\mu\sigma_B^{\nu A'}W_{\mu\nu CD} \quad (3.17)$$

e

$$w_{A'B'CD} = w_{(A'B')CD} = \frac{1}{2}\sigma_{AA'}^\mu\sigma_{B'}^{\nu A}W_{\mu\nu CD}. \quad (3.18)$$

3.2 Curvaturas Eletromagnéticas Espinoriais

A decomposição espinorial de $F_{\mu\nu}$ aparece como

$$F_{AA'BB'} = \gamma_{AB}\phi_{A'B'} + \gamma_{A'B'}\phi_{AB}, \quad (3.19)$$

com as relações de definição pertinentes sendo

$$\phi_{AB} = \frac{i}{2}w_{ABC}{}^C, \quad \phi_{A'B'} = \frac{i}{2}w_{A'B'C}{}^C, \quad (3.20)$$

as quais obedecem as seguintes relações de conjugação

$$w_{ABC}{}^C = -w_{ABC'}{}^{C'}, \quad w_{A'B'C}{}^C = -w_{A'B'C'}{}^{C'}. \quad (3.21)$$

Os objetos ϕ_{AB} e $\phi_{A'B'}$ constituem funções de onda para fótons de Infeld e van der Waerden em $\mathcal{M}$ (vide, por exemplo, [18]). Estes espinores, devido a simetria portada pelas Eqs. (3.17) e (3.18), carregam as seis componentes reais independentes que descrevem os graus de liberdade de $F_{\mu\nu}$. Assim, cada uma das componentes que entram na configuração

$$(\phi_{00}, \phi_{10} = \phi_{01}, \phi_{11}), \quad (3.22)$$

propiciam dois graus de liberdade. As relações campo-potencial eletromagnéticas são, então, dadas por (3.9) e (3.19). Tem-se, com efeito

$$\phi_{AB} = -\nabla_{(A}^{C'} \Phi_{B)C'}, \quad \phi_{A'B'} = -\nabla_{(A'}^C \Phi_{B')C}. \quad (3.23)$$

Para obtermos o par (3.23), utilizamos a expansão (3.19) e usamos (3.16) na forma

$$-2i(\nabla_{AA'} \Phi_{BB'} - \nabla_{BB'} \Phi_{AA'}) = M_{AB} w_{A'B'C}{}^C + M_{A'B'} w_{ABC}{}^C, \quad (3.24)$$

tal que, implementando o desenvolvimento

$$-2iM^{AB}(\nabla_{AA'} \Phi_{BB'} - \nabla_{BB'} \Phi_{AA'}) = M^{AB} (M_{AB} w_{A'B'C}{}^C + M_{A'B'} w_{ABC}{}^C), \quad (3.25)$$

juntamente com o complexo conjugado de (3.25), chegamos a relação (3.23).

A versão contravariante da Eq. (3.23) pode ser obtida com base no uso das seguintes equações de autovalor:

$$\nabla_\mu \gamma_{BC} = i\beta_\mu \gamma_{BC} \quad (3.26)$$

e

$$\nabla_\mu \gamma^{BC} = -i\beta_\mu \gamma^{BC}, \quad (3.27)$$

com β_μ sendo dado pela relação [17]

$$\beta_\mu = \partial_\mu \Phi + 2\Phi_\mu, \quad (3.28)$$

e a quantidade Φ sendo o argumento polar da componente independente de γ_{AB} . Assim, obtêm-se

$$\phi^{AB} = \nabla_{C'}^{(A} \Phi^{B)C'}, \quad \phi^{A'B'} = \nabla_C^{(A'} \Phi^{B')C}. \quad (3.29)$$

É importante notar que o bivector dual $F_{\mu\nu}^*$ possui a decomposição [10]

$$F_{AA'BB'}^* = i(\gamma_{AB} \phi_{A'B'} - \gamma_{A'B'} \phi_{AB}), \quad (3.30)$$

a qual é obtida utilizando-se uma relação mundo formalmente do mesmo tipo que (2.18) juntamente com a expansão

$$\sqrt{-g} \epsilon_{AA'BB'CC'DD'} = i(\gamma_{AC} \gamma_{BD} \gamma_{A'D'} \gamma_{B'C'} - \gamma_{AD} \gamma_{BC} \gamma_{A'C'} \gamma_{B'D'}). \quad (3.31)$$

3.3 Curvaturas Gravitacionais Espinoriais

Como observado em [10], a estrutura gravitacional de $\mathcal{M}$ é completamente equivalente ao par simétrico

$$\mathbf{G} = (w_{AB(CD)}, w_{A'B'(CD)}), \quad (3.32)$$

em concordância com a expansão [5], [9]

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = (\gamma_{A'B'}\gamma_{C'D'}w_{AB(CD)} + \gamma_{AB}\gamma_{C'D'}w_{A'B'(CD)}) + c.c.. \quad (3.33)$$

Aqui, é conveniente introduzir a notação

$$X_{ABCD} = w_{AB(CD)}, \quad \Xi_{CA'DB'} = w_{A'B'(CD)}, \quad (3.34a)$$

tal que pode-se reexpressar (3.33) como

$$R_{AA'BB'CC'DD'} = (\gamma_{A'B'}\gamma_{C'D'}X_{ABCD} + \gamma_{AB}\gamma_{C'D'}\Xi_{CA'DB'}) + c.c.. \quad (3.35)$$

Devido à simetria de Riemann-Christoffel

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\mu\nu}, \quad (3.36)$$

pode-se afirmar que o espinor $\Xi_{CA'DB'}$ é Hermitiano e, em adição, que

$$X_{M(AB)}{}^M = 0 \Rightarrow X_{MAB}{}^M = \chi\gamma_{AB}. \quad (3.37)$$

O chamado primeiro dual à esquerda de $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$ é definido por [9]

$${}^*R_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\sigma}, \quad (3.38)$$

tal que, com o uso de (3.31), obtêm-se a representação

$${}^*R_{AA'BB'CC'DD'} = [(-i)(\gamma_{A'B'}\gamma_{C'D'}X_{ABCD} - \gamma_{AB}\gamma_{C'D'}\Xi_{CA'DB'})] + c.c.. \quad (3.39)$$

Com a expansão (3.35), pode-se expressar a versão espinorial do tensor de Ricci como

$$R_{AA'BB'} = 2(\chi\gamma_{AB}\gamma_{A'B'} - \Xi_{AA'BB'}), \quad (3.40)$$

com a quantidade

$$\chi = \frac{1}{2}X_{ML}{}^{ML}, \quad (3.41)$$

sendo, portanto, um escalar mundo-espin. Consequentemente, quando a constante cosmológica está presente nas equações de Einstein, obtêm-se a relação de traço estendida

$$R = 8\chi = 4\lambda + \kappa T, \quad (3.42)$$

com λ sendo a constante cosmológica, κ a constante gravitacional de Einstein e T sendo o traço métrico de algum tensor de energia-momentum. Pode ser mostrado [10] que, quando somente estão presentes em $\mathcal{M}$ fontes associadas com tensores de energia-momentum com traços zero, o tensor de Einstein é representado por

$$G_{AA'BB'} = -2\Xi_{AA'BB'} - \lambda\gamma_{AB}\gamma_{A'B'}. \quad (3.43)$$

Na presença de quaisquer fontes e da constante cosmológica, as equações de Einstein são então expressas como

$$\Xi_{AA'BB'} = \frac{\kappa}{2}(T_{AA'BB'} - \frac{1}{4}T\gamma_{AB}\gamma_{A'B'}). \quad (3.44)$$

Na Ref.[9], foi mostrado pela primeira vez que a simetria nos pares de índices expressa por (3.36), quando combinada com a propriedade cíclica

$$R_{[\mu\nu\lambda]\sigma} = 0 \Rightarrow {}^*R_{\mu\lambda}{}^{\lambda\sigma} = 0, \quad (3.45)$$

implica que a quantidade χ é real. Uma função de onda para grávitons ocorre na famosa expansão de Penrose [9]

$$X_{ABCD} = \Psi_{ABCD} - \frac{2}{3}\chi\gamma_{A(C}\gamma_{D)B}, \quad (3.46)$$

onde

$$\Psi_{ABCD} = X_{(ABCD)} = X_{A(BCD)} = X_{(ABC)D}. \quad (3.47)$$

O espinor Ψ_{ABCD} descreve localmente em $\mathcal{M}$ os dez graus de liberdade de $g_{\mu\nu}$. A propagação de grávitons na presença de fontes, em ambos os formalismos, é descrita na Ref. [19].

Capítulo 4

Teoria Espinorial

Como mencionado previamente, apresentar-se-á neste Capítulo a versão espinorial da teoria de campos associada ao nosso interesse central aqui. Começar-se-á na Seção 4.1 com a transcrição espinorial das equações de campo mundo tais como deduzidas no Capítulo 2. Subsequentemente, na Seção 4.2, levar-se-á a cabo uma revisão das técnicas calculacionais que devem ser empregadas em conjunção com a dedução das equações de onda do contexto teórico sob consideração. Tais equações de onda serão, então, exibidas na Seção 4.3. Será visto que, de fato, nenhum acoplamento entre fótons de Infeld e van der Waerden e funções de onda de Proca realmente ocorre em $\mathcal{M}$.

4.1 Versão Espinorial das Equações de Campo de Proca

A definição das funções de onda de Proca associadas com $f_{\mu\nu}$ é formalmente a mesma que aquela dada pela Eq. (3.19). Assim, tem-se¹

$$f_{AA'BB'} = \gamma_{AB}\psi_{A'B'} + \gamma_{A'B'}\psi_{AB}, \quad (4.1)$$

juntamente com

$$\psi_{AB} = \frac{1}{2}f_{ABC'}{}^{C'} = \psi_{(AB)}, \quad \psi_{A'B'} = \frac{1}{2}f_{A'B'C}{}^C = \psi_{(A'B')}, \quad (4.2)$$

tal que o par $(\psi_{AB}, \psi_{A'B'})$ representa irreduzivelmente o bivetor $f_{\mu\nu}$. A relação (2.5) torna-se representada por

$$\psi_{AB} = -\nabla_{(A}^{C'} A_{B)C'}, \quad \psi_{A'B'} = -\nabla_{(A'}^C A_{B')C}, \quad (4.3)$$

¹Dever ser observado que a propriedade de conjugação complexa (3.21) *não* é válida para funções de onda de Proca em $\mathcal{M}$.

cuja forma contravariante é expressa por

$$\psi^{AB} = \nabla_{C'}^{(A} A^{B)C'}, \quad \psi^{A'B'} = \nabla_C^{(A'} A^{B')C}. \quad (4.4)$$

A primeira metade do conjunto de equações de campo, tais como dadas por (2.15), aparece como

$$\nabla^{AA'} (\gamma_{A'B'} \psi_{AB} + c.c.) + m^2 A_{BB'} = 0. \quad (4.5)$$

A segunda metade emerge como a versão espinorial da identidade de Bianchi para $f_{\mu\nu}$, a saber

$$\nabla^{AA'} f_{AA'BB'}^* = i \nabla^{AA'} (\gamma_{AB} \psi_{A'B'} - c.c.) = 0, \quad (4.6)$$

ou seja

$$\nabla^{AA'} (\gamma_{AB} \psi_{A'B'}) = \nabla^{AA'} (\gamma_{A'B'} \psi_{AB}). \quad (4.7)$$

Portanto, com o uso das Eqs. (3.26) e (3.27), após algumas manipulações, obtêm-se as equações de campo

$$\nabla_{B'}^A \psi_{AB} + \frac{1}{2} m^2 A_{BB'} = i \beta_{B'}^A \psi_{AB} \quad (4.8)$$

e

$$\nabla_B^{A'} \psi_{A'B'} + \frac{1}{2} m^2 A_{BB'} = -i \beta_B^{A'} \psi_{A'B'}, \quad (4.9)$$

com $\beta_{B'}^A = \sigma_{\mu B'}^A \beta^\mu$, por exemplo, e β_μ sendo dado por (3.28).

A forma contravariante de (4.8) e (4.9) é dada por

$$\nabla_A^{B'} \psi^{AB} - \frac{1}{2} m^2 A^{BB'} = -i \beta_A^{B'} \psi^{AB} \quad (4.10)$$

e

$$\nabla_{A'}^B \psi^{A'B'} - \frac{1}{2} m^2 A^{BB'} = i \beta_{A'}^B \psi^{A'B'}. \quad (4.11)$$

Vale a pena mencionar que as manipulações que levam às equações (4.8) e (4.9) particularmente envolvem a utilização das seguintes relações:

$$\nabla^{AA'} (f_{AA'BB'} + i f_{AA'BB'}^*) + m^2 A_{BB'} = 0 \quad (4.12a)$$

e

$$\nabla^{AA'} (f_{AA'BB'} - i f_{AA'BB'}^*) + m^2 A_{BB'} = 0. \quad (4.12b)$$

Uma versão formalmente mais simples da teoria pode ser obtida a partir das equações de campo (4.8)-(4.11) e de dispositivos diferenciais do tipo²

$$\nabla_{B'}^A \psi_{AB} = \nabla_{B'}^A (\psi_A^C \gamma_{CB}), \quad \nabla_A^{B'} \psi^{AB} = \nabla_A^{B'} (\gamma^{BC} \psi_C^A). \quad (4.13)$$

²A simetria das funções de onda portadas por (4.1) faz com que o "staggering" de seus índices seja irrelevante.

O que resulta é, com efeito, que a teoria pode ser reformulada pela seguinte equação de campo:

$$\nabla_{B'}^A \psi_A^B + \frac{1}{2} m^2 A_{B'}^B = 0, \quad (4.14)$$

juntamente com o complexo conjugado de (4.14).

4.2 Técnicas Computacionais

A configuração operatorial básica envolvida nas técnicas calculacionais usualmente empregadas para deduzir-se quaisquer equações de onda que ocorrem no contexto dos formalismos $\gamma\varepsilon$, consiste do comutador covariante [10], [18]

$$[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}] = \gamma_{AB} \Delta_{A'B'} + \gamma_{A'B'} \Delta_{AB}. \quad (4.15)$$

Os operadores Δ são simétricos, lineares e obedecem a regra de Leibniz.

A representação espinorial do comutador mundo $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ como $[\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}]$ é possível devido à supostamente aplicável constância covariante de quaisquer objetos conectores Hermitianos. Então, pode-se implementar as expressões conjugadas

$$\Delta_{AB} = \nabla_{C'(A} \nabla_{B)}^{C'} - i\beta_{C'(A} \nabla_{B)}^{C'} = -\nabla_{(A}^{C'} \nabla_{B)C'} \quad (4.16)$$

e

$$\Delta_{A'B'} = \nabla_{C(A'} \nabla_{B')}^C + i\beta_{C(A'} \nabla_{B')}^C = -\nabla_{(A'}^C \nabla_{B')C}. \quad (4.17)$$

A forma contravariante dos operadores Δ é expressa por

$$\Delta^{AB} = -(\nabla^{C'(A} \nabla_{C'}^B) + i\beta^{C'(A} \nabla_{C'}^B), \quad (4.18)$$

ou, equivalentemente, por

$$\Delta^{AB} = \nabla_{C'}^{(A} \nabla^{B)C'}. \quad (4.19)$$

É claro que ainda temos as prescrições para os operadores Δ conjugados complexos.

Para vermos o efeito da atuação dos operadores Δ em vetores de spin, consideramos o comutador (4.15) e inicialmente fazemos

$$\gamma^{AB} [\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}] = 2\Delta_{A'B'}, \quad (4.20)$$

tal que

$$\Delta_{A'B'} \zeta^C = \frac{1}{2} \gamma^{AB} [\nabla_{AA'}, \nabla_{BB'}] \zeta^C. \quad (4.21)$$

Então, com a expressão (3.4), obtêm-se

$$\begin{aligned} \Delta_{A'B'} \zeta^C &= \frac{1}{2} \gamma^{AB} W_{AA'BB'M}{}^C \zeta^M \\ &= \frac{1}{2} \gamma^{AB} \gamma^{CL} W_{AA'BB'ML} \zeta^M. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Agora, empregando (3.16), pode-se particularmente usar o desdobramento

$$w_{A'B'ML} = w_{A'B'(ML)} + \frac{1}{2}w_{A'B'J}^J \gamma_{ML}, \quad (4.23)$$

visando trabalhar-se (4.22) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta_{A'B'}\zeta^C &= \frac{1}{2}\gamma^{AB}\gamma^{CL}(\gamma_{AB}w_{A'B'ML} + \gamma_{A'B'}w_{ABML})\zeta^M \\ &= \gamma^{CL}w_{A'B'ML}\zeta^M \\ &= \gamma^{CL}(w_{A'B'(ML)} + \frac{1}{2}w_{A'B'J}^J \gamma_{ML})\zeta^M \\ &= \gamma^{CL}(\Xi_{A'B'ML} + \frac{1}{2}w_{A'B'J}^J \gamma_{ML})\zeta^M \\ &= \Xi_{A'B'M}^C \zeta^M + \frac{1}{2}w_{A'B'J}^J \zeta^C, \end{aligned} \quad (4.24)$$

o que, deste modo, descreve a atuação de $\Delta_{A'B'}$ sobre o vetor de espin ζ^C . Então, inserindo (3.20) na última igualdade de (4.24), obtêm-se

$$\Delta_{A'B'}\zeta^C = \Xi_{A'B'M}^C \zeta^M - i\phi_{A'B'}\zeta^C. \quad (4.25)$$

De maneira semelhante, obtêm-se a expressão correspondente para Δ_{AB} . Têm-se, com efeito,

$$\Delta_{AB}\zeta^C = X_{ABM}^C \zeta^M - i\phi_{AB}\zeta^C. \quad (4.26)$$

As expansões Δ para um vetor de espin covariante ξ_C podem ser facilmente obtidas expressando-se a liberdade de torção de ∇_μ como, por exemplo,

$$\Delta_{AB}(\zeta^C \xi_C) = 0, \quad (4.27)$$

e usando-se a regra de Leibniz. Assim, com o uso de (4.25) e (4.26), obtêm-se

$$\Delta_{A'B'}\xi_C = -(\Xi_{A'B'C}^M \xi_M - i\phi_{A'B'}\xi_C) \quad (4.28)$$

e

$$\Delta_{AB}\xi_C = -(X_{ABC}^M \xi_M - i\phi_{AB}\xi_C), \quad (4.29)$$

juntamente com as (algebricamente independentes) conjugadas de (4.25)-(4.29). Expansões Δ para tensores de espin de valência arbitrária podem ser estabelecidas levando-se em conta o fato que tensores de espin arbitrários podem sempre ser vistos como combinações lineares de produtos exteriores entre vetores de espin.

Um dos procedimentos básicos para obter-se as equações de onda de interesse envolve a utilização da expansão

$$\nabla_{A'}^C \nabla^{AA'} = \Delta^{AC} - \frac{1}{2}\gamma^{AC}\square, \quad (4.30)$$

bem como a versão covariante de (4.30). Para completar-se os passos calculacionais de modo sistemático [10], também é necessário utilizar as seguintes regras:

$$2\nabla_{[C}^{A'}\nabla_{A]A'} = \gamma_{AC}\square = \nabla_D^{A'}(\gamma_{CA}\nabla_{A'}^D) \quad (4.31)$$

e

$$2\nabla_{A'}^{[C}\nabla^{A]A'} = \gamma^{CA}\square = \nabla_{A'}^D(\gamma^{AC}\nabla_D^{A'}), \quad (4.32)$$

juntamente com suas conjugadas complexas e a expressão

$$\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu = \sigma_{MM'}^\mu\sigma^{\nu MM'}\nabla_\mu\nabla_\nu = \nabla_{MM'}\nabla^{MM'}. \quad (4.33)$$

4.3 Equações de Onda

Neste estágio, serão obtidas inicialmente as equações de onda para ψ_{AB} e ψ_A^B . A equação de onda para ψ^{AB} será considerada no Capítulo 5, e será deduzida levando-se em conta certas correlações diferenciais. Tais correlações foram usadas pela primeira vez na Ref. [10]. As equações de onda para os campos com índices linhados poderão obviamente ser obtidas simplesmente levando-se a cabo conjugações complexas. Para começar, então, levanta-se o índice B' da Eq.(4.8) e aplica-se o operador $\nabla_{B'}^C$ em ambos os lados da equação resultante. Têm-se, com efeito,

$$\nabla_{B'}^C\nabla^{AB'}\psi_{AB} + \frac{1}{2}m^2\nabla_{B'}^CA_B^{B'} = \nabla_{B'}^C(i\beta^{AB'}\psi_{AB}), \quad (4.34)$$

tal que, implementando a expansão (4.30), obtêm-se

$$(2\Delta^{AC} - \gamma^{AC}\square)\psi_{AB} + m^2\nabla_{B'}^CA_B^{B'} = 2i\nabla_{B'}^C(\beta^{AB'}\psi_{AB}). \quad (4.35)$$

O cálculo da derivada Δ de (4.35) pode ser feito com base na equação (3.46) e no protótipo dado pela expansão (4.29), o que resulta em

$$2\Delta^{AC}\psi_{AB} = \frac{R}{3}\psi_B^C - 2\Psi_B^{CMN}\psi_{MN} + 4i\phi^{AC}\psi_{AB}. \quad (4.36)$$

O termo de massa em (4.35), pode ser trabalhado usando-se (4.4) juntamente com o desenvolvimento

$$\begin{aligned} \nabla_{B'}^CA_B^{B'} &= \nabla_{B'}^C(A^{DB'}\gamma_{DB}) = (\nabla_{B'}^CA^{DB'})\gamma_{DB} + i\beta_{B'}^CA_B^{B'} \\ &= \psi_B^C + \frac{1}{2}\gamma^{CD}\gamma_{DB}\nabla_\mu A^\mu + i\beta_{B'}^CA_B^{B'} \\ &= \psi_B^C - \frac{1}{2}\delta_B^C\nabla_\mu A^\mu + i\beta_{B'}^CA_B^{B'}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

com o último termo da terceira igualdade de (4.37) sendo

$$i\beta_{B'}^C A_B^{B'} = i(\nabla_{B'}^C \Phi + 2\Phi_{B'}^C) A_B^{B'}. \quad (4.38)$$

Aplicando a regra de Leibniz no lado direito de (4.35), e trabalhando as contribuições individuais assim ocorrentes, obtêm-se após alguma computação

$$\beta^{AB'} \nabla_{B'}^C \psi_{AB} = (\beta^\mu \nabla_\mu - \frac{1}{2} i \beta^\mu \beta_\mu) \psi_B^C + \frac{1}{2} m^2 \beta_{B'}^C A_B^{B'}, \quad (4.39)$$

juntamente com

$$(\nabla_{B'}^C \beta^{AB'}) \psi_{AB} = (\frac{1}{2} \square \Phi + \nabla_\mu \Phi^\mu) \psi_B^C + 2\phi^{AC} \psi_{AB}. \quad (4.40)$$

Para o lado esquerdo de (4.40), utilizou-se o desdobramento

$$(\nabla_{B'}^C \beta^{AB'}) \psi_{AB} = (\nabla_{B'}^{(C} \beta^{A)B'}) \psi_{AB} + (\nabla_{B'}^{[C} \beta^{A]B'}) \psi_{AB}, \quad (4.41)$$

bem como a expressão (3.28). Para o termo simétrico de (4.41), tem-se

$$(\nabla_{B'}^{(C} \beta^{A)B'}) \psi_{AB} = (\nabla_{B'}^{(C} \nabla^{A)B'} \Phi + 2\nabla_{B'}^{(C} \Phi^{A)B'}) \psi_{AB}, \quad (4.42)$$

o qual, devido à relação (3.29), torna-se

$$(\nabla_{B'}^{(C} \beta^{A)B'}) \psi_{AB} = (\Delta^{AC} \Phi + 2\phi^{AC}) \psi_{AB}, \quad (4.43)$$

com, evidentemente, $\Delta^{AC} \Phi = 0$. Para o termo antissimétrico de (4.41), têm-se a contribuição

$$\nabla_{B'}^{[C} \beta^{A]B'} = \frac{1}{2} \gamma^{CA} \nabla_\mu \beta^\mu = (\frac{1}{2} \square \Phi + \nabla_\mu \Phi^\mu) \gamma^{CA}. \quad (4.44)$$

A equação de onda para ψ_{AB} emerge quando combina-se as contribuições (4.36)-(4.44), também efetuando-se um movimento indicial adequado. Observa-se que o acoplamento $\phi^{AC} \psi_{AB}$ envolvido na (4.36) cancela aquele oriundo da (4.40). Em adição, com o movimento indicial efetuado, o termo de massa de (4.35) torna-se

$$m^2 \nabla_{CB'} A_B^{B'} = m^2 (\psi_{BC} - \frac{1}{2} \gamma_{BC} \nabla_\mu A^\mu + i \beta_{CB'} A_B^{B'}), \quad (4.45)$$

tal que o último termo do lado direito de (4.39) é cancelado pelo termo de massa explícito da eq. (4.34). Concordantemente, obtêm-se a equação de onda

$$(\square - 2i\beta^\mu \nabla_\mu - \Upsilon + \frac{R}{3} + m^2) \psi_{AB} - 2\Psi_{AB}{}^{CD} \psi_{CD} = 0, \quad (4.46)$$

juntamente com a definição³

$$\Upsilon \doteq \beta^\mu \beta_\mu + i(\square \Phi + 2\nabla_\mu \Phi^\mu). \quad (4.47)$$

³Vale a pena enfatizar que $\square \Phi + 2\nabla_\mu \Phi^\mu = \nabla_\mu \beta^\mu$ tal como em (4.44).

Visando a dedução da equação de onda para ψ_A^B , é conveniente rearranjar-se (4.14) como segue

$$\nabla^{AB'}\psi_A^B + \frac{1}{2}m^2 A^{BB'} = 0. \quad (4.48)$$

Assim, aplicando o operador $\nabla_{B'}^C$ em (4.48), obtêm-se as contribuições

$$\nabla_{B'}^C \nabla^{AB'}\psi_A^B = \Delta^{AC}\psi_A^B - \frac{1}{2}\gamma^{AC}\square\psi_A^B \quad (4.49)$$

e

$$m^2\nabla_{B'}^C A^{BB'} = m^2(\nabla_{B'}^{(B} A^{C)B'} - \frac{1}{2}\gamma^{BC}\nabla_\mu A^\mu), \quad (4.50)$$

com a segunda das quais, devido à uma das relações (4.11), podendo ser reexpressa por

$$m^2\nabla_{B'}^C A^{BB'} = m^2(\psi^{BC} - \frac{1}{2}\gamma^{BC}\nabla_\mu A^\mu). \quad (4.51)$$

A derivada Δ envolvida em (4.49) é dada por

$$\Delta^{AC}\psi_A^B = X^{AC}{}_M{}^B\psi_A^M - X^{AC}{}_A{}^M\psi_M^B = \Delta^{A(B}\psi_A^{C)}. \quad (4.52)$$

Deveria estar evidente que a ausência em (4.52) de contribuições eletromagnéticas é devido essencialmente à valência de ψ_A^B . Uma discussão detalhada desta situação no contexto dos formalismos $\gamma\varepsilon$ envolve a teoria de densidades de espin, a qual é dada na Ref. [10]. A propriedade de simetria exibida pela expansão (4.52) pode ser deduzida usando-se a relação (3.37) e levando-se a cabo o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \Delta^{A[C}\psi_A^{B]} &= X^{A[C}{}_M{}^B\psi_A^M + X^{A[C}{}_M{}^B]\psi_A^M \\ &= \frac{1}{2}\gamma^{CB}X^A{}_{LM}\psi^{LM} - X^{A[C]B]M}\psi_{AM} \\ &= \frac{1}{2}\chi\gamma^{CB}(\gamma_{ML}\psi^{ML} - \gamma^{AM}\psi_{AM}) \equiv 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Assim, a derivada Δ envolvida na Eq. (4.49) aparece como a contribuição puramente gravitacional

$$\Delta^{AB}\psi_A^C = \frac{R}{6}\psi^{BC} + \Psi^{BCLM}\psi_{LM}. \quad (4.54)$$

Portanto, combinando as Eqs. (4.49)-(4.54), chega-se na equação de onda

$$(\square + \frac{R}{3} + m^2)\psi_A^B + 2\Psi_{AD}{}^{BC}\psi_C^D = -\frac{1}{2}m^2\delta_A^B\nabla_\mu A^\mu. \quad (4.55)$$

na qual o lado direito é igual a zero mediante a divergencia covariante de A^μ .

Capítulo 5

Conclusões

O trabalho aqui exposto apresentou uma versão da teoria de campos clássicos de Proca em espaços-tempo curvos sem torção, e teve como um dos principais objetivos a obtenção das equações de campo e de onda para a teoria dentro do contexto de um dos formalismos espinoriais de Infeld e van der Waerden. As equações de campo mundo foram introduzidas com base no princípio variacional que usualmente ocorre em teorias de campo clássicos em Relatividade Geral. A versão espinorial das mesmas foi formulada com base numa transcrição direta das configurações mundo. As equações de onda espinoriais foram deduzidas a partir da utilização de técnicas computacionais bem conhecidas na literatura.

No que concerne a versão mundo da teoria, há uma peculiaridade da mesma relacionada com a aplicabilidade da seguinte condição:

$$\nabla_\mu A^\mu = 0.$$

Este fato é estabelecido diretamente ao combinar-se a divergência covariante da Eq. (2.15), a saber

$$\nabla_\nu \nabla_\mu f^{\mu\nu} + m^2 \nabla_\nu A^\nu = 0,$$

com a relação

$$\nabla_\nu \nabla_\mu f^{\mu\nu} = -\nabla_{[\mu} \nabla_{\nu]} f^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}[\nabla_\mu, \nabla_\nu] f^{\mu\nu}$$

e com a expansão

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] f^{\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda}{}^\mu f^{\lambda\nu} + R_{\mu\nu\lambda}{}^\nu f^{\mu\lambda} = 2R_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \equiv 0.$$

Assim, a equação de onda (2.21) deve ser implementada na forma

$$(\square + m^2)A_\mu + R_\mu{}^\lambda A_\lambda = 0,$$

enquanto que o lado direito de (4.55) deve ser posto igual a zero.

Todavia, como foi visto, o termo de interação $4i\phi^{AC}\psi_{AB}$, o qual porta uma das funções de onda para a curvatura eletromagnética de $\mathcal{M}$, pegou lugar nos estágios intermediários da dedução da Eq. (4.46) mas, no entanto, foi cancelado quando os procedimentos pertinentes foram completados. Uma das propriedades das equações de onda deduzidas na Seção 4.3 é que tais equações admitem um caso limite quando $m = 0$ que reproduz *formalmente* algumas das equações de onda de Infeld e van der Waerden. Pode-se enfatizar que as estruturas espinoriais exibidas aqui não estão disponíveis na literatura tradicional sobre campos clássicos em Relatividade Geral.

De fato, a equação de onda para ψ^{AB} pode ser obtida facilmente a partir de (4.46) com base no uso do seguinte dispositivo diferencial:

$$\square\psi^{AB} = \square(\gamma^{BC}\psi_C^A) = (\square\gamma^{BC})\psi_C^A + \gamma^{BC}\square\psi_C^A + 2(\nabla_\mu\gamma^{BC})\nabla^\mu\psi_C^A.$$

O que resulta é, com efeito, que as equações de onda para ψ_{AB} e ψ^{AB} podem ser obtidas uma da outra a partir da combinação da regra de troca de valência

$$i\beta^\mu\nabla_\mu \leftrightarrow -i\beta^\mu\nabla_\mu, \quad \Upsilon \leftrightarrow \bar{\Upsilon}$$

com a Eq. (3.27) e a seguinte equação de autovalor:

$$\square\gamma^{BC} = -(\beta^\mu\beta_\mu + i\nabla_\mu\beta^\mu)\gamma^{BC}.$$

Assim, chega-se ao resultado que a versão contravariante da Eq. (4.46) deve ser posta como

$$(\square + 2i\beta^\mu\nabla_\mu - \bar{\Upsilon} + \frac{R}{3} + m^2)\psi^{AB} - 2\Psi^{AB}{}_{CD}\psi^{CD} = 0.$$

Vale a pena notar que, devido à constância covariante de $\sigma_{AA'}^\mu$, pode-se reexpressar a Eq. (2.21) como

$$(\square + m^2)A_{BB'} + R_{BB'}{}^{CC'}A_{CC'} = 0,$$

desde que $\nabla_\mu A^\mu = 0$.

Como perspectiva, tem-se a ideia de continuar os estudos sobre campos de Proca em espaços-tempo com derivadas covariantes torcionais, e também utilizar os formalismos espinoriais de Infeld e van der Waerden para eventualmente descrever algumas situações envolvidas nos modelos cosmológicos convencionais.

Referências Bibliográficas

- [1] Infeld, L., Waerden, B.L.: Sitzber. Akad. Wiss., Physik-math. Kl. 9, 380 (1933)
- [2] Infeld, L.: Physik ZS. 33, 475 (1932)
- [3] Van der Waerden; R., B.L.: Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Physics. Kl., 100 (1929)
- [4] Weyl, H.: Z. Physik 56, 330 (1929)
- [5] Witten, L.: Phys. Rev. 1, 357 (1959)
- [6] G. A. Proca, Alexandre Proca. Oeuvre Scientifique Publee, S.I.A.G., Rome, Italy (1988)
- [7] Penrose, R.: Ann. Phys. (N.Y.) **10**, 171 (1960))
- [8] R. Bach: Math. Z. 9 (1921) 110.
- [9] Penrose; R., Rindler; W.: Spinors and Space-Time Vol 1, Cambridge, (1984)
- [10] Cardoso, J.G.: Czech Journal of Physics 4, 401 (2005)
- [11] Carmeli, M., Malin, S.: Theory of Spinors, An Introduction; Word Scientific, Singapore (2000)
- [12] Landau, L.D., Lifchitz, L.: Théorie du Champ, Moscou (1966)
- [13] Weinberg, S.: Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons (1972)
- [14] Corson, E.M.: Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations, Glasgow (1953)
- [15] Cardoso, J.G., Adv. Appl. Clifford Algebras 22: The Classical Two-Component Spinor Formalisms for General Relativity I, (2012)

- [16] Cardoso, J.G., Adv. Appl. Clifford Algebras 22: The Classical Two-Component Spinor Formalisms for General Relativity II, (2012)
- [17] Bade, W. L., Jehle, H.: Rev. Mod. Phys. 3, 714 (1953)
- [18] Cardoso J.G.: Acta Phys. Polon., Vol. 38, 8 (2007) 2525
- [19] Cardoso J.G.: Nuovo Cimento B 6, 124 (2009) 631
- [20] Geroch, R. Spinor Structure of Space-Times in General Relativity I, J. Math.Phys. 9, 1739-1744 (1968).
- [21] Kuerten A. Equações de Onda Eletromagnéticas em Espaços-Tempo Curvos. Fev. 2011, 43, Dissertação de Mestrado - UDESC.